Cálculo Grupos A y C Curso 2015-16

Problema 63

Calcule la integral de línea del campo vectorial plano $\vec{F}(x,y) = (xy, 0)$ desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$ a lo largo de las siguientes curvas: (a) el eje x, (b) la parábola $y = 1 - x^2$, (c) la línea quebrada $y = |x| - 1$ y (d) la parte inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ¿Es $\vec{F}$ gradiente de algún campo escalar?

Problema 64

Sea R la región plana limitada por la curva

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t, -1-t) & \text{si } t \in [-1,0] \\ \left(\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) & \text{si } t \in [0, 3\pi/2] \end{cases}$$

y sean $P(x,y) = x + y^3$ y $Q(x,y) = x - x^3$. Compruebe que se cumple el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

Problema 65

Un toro se puede representar paramétricamente por la función $\vec{\Phi} : D \to \mathbf{R}^3$, donde $\vec{\Phi} \equiv (x,y,z)$ está dada por

$$(x(\phi,\theta),\, y(\phi,\theta),\, z(\phi,\theta)) = ((b + a\cos\phi)\cos\theta, (b + a\cos\phi)\operatorname{sen}\theta, a\operatorname{sen}\phi)\ ;$$

a y b son los radios menor y mayor del toro, y D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, es decir $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$. Calcule el área del toro.

Problema 66

Calcule el área de la región de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ delimitada por su intersección con el cilindro $x^2 + y^2 - x = 0$.

Problema 67

Calcule $\int_S dS\, z$ donde S es el hemisferio superior de radio a.

Problema 68

Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$; y su base $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ a través de dicha superficie.

Problema 69

Calcular directamente y mediante el teorema de Stokes el flujo del campo vectorial $\operatorname{rot}\vec{F}$ sobre S donde $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ y S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$.

Problema 70

Dado el campo vectorial $\vec{A} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, se pide que:

(a) Calcule la integral de flujo del rotacional de $\vec{A}$ a través de la zona esférica dada por $x^2+y^2+z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1/2$.

(b) Calcule las integrales de línea del campo vectorial $\vec{A}$ a lo largo de las circunferencias que limitan la zona esférica del apartado (a).

(c) ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b)?